Chapitre 2

Exercice 1

Montrer que l'entropie topologique d'un homéomorphisme de $[0,1]$ est nulle.

Exercice 2

Donner un exemple d'homéomorphisme $T : X \to X$ d'un espace compact dont l'entropie topologique est infinie.

Exercice 3

Soient $T_1 : X_1 \to X_1$ et $T_2 : X_2 \to X_2$ deux applications définies sur des espaces métriques compacts. Montrer que l'entropie de l'application produit

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 \ : X_1 \times X_2 &\to X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \big(T_1(x_1), T_2(x_2)\big) \end{aligned}$$

vérifie $h(T_1 \times T_2) = h(T_1) + h(T_2)$.

Exercice 4

Quelle est l'entropie de $T : z \mapsto z^2$ définie sur la sphère de Riemann.

Exercice 5

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact tel que $\Omega(T)$ est fini. Montrer que $h(T) = 0$.

Exercice 6

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. On rappelle que x est non errant si pour tout voisinage U de x, il existe $y \in U$ et $n \geq 0$ tel que $T^n(y) \in U$.

1) Montrer que l'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est fermé et vérifie $T\big(\Omega(T)\big) \subset \Omega(T)$.

2) À l'aide du principe variationnel, montrer que $h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$.

Exercice 7

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. On suppose qu'il existe une famille finie $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ de parties fermées positivement invariantes (i.e. $T(X_i) \subset X_i$), telles que $X = \bigcup_{1\leq i\leq p} X_i$. Montrer que $h(T) = \sup_{1\leq i\leq p} h(T|_{X_i})$.

Exercice 8

On se donne une application continue sur un espace métrique compact $T : X \to X$.

1) On fixe dans cette question μ, ν dans $\mathcal{M}_T$ et $t \in [0,1]$. Montrer que pour toute partition borélienne $\mathcal{P} = (P_i)_{\in I}$, on a :

$$tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) \leq H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \leq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) - t\ln t - (1-t)\ln(1-t).$$

En déduire que

$$H_{t\mu+(1-t)\nu}(T,\mathcal{P}) = tH_\mu(T,\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(T,\mathcal{P}),$$

puis que

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(T) = th_\mu(T) + (1-t)h_\nu(T).$$

2) On suppose qu'il existe une unique mesure $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$. Montrer que μ est ergodique.

3) On suppose que $h(T) = +\infty$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_T$ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.

4) Donner un exemple où $h(T) = +\infty$ et où il n'existe aucune mesure ergodique μ telle que $h_\mu(T) = h(T)$.

Exercice 9

Soit $\alpha \in \mathbf{T}^1$. Calculer l'entropie topologique de

$$\begin{array}{rl} F : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, y+\alpha) \end{array}.$$

Exercice 10

Soit $T : X \to X$ une application lispshitzienne sur un espace métrique compact. L'entropie peut elle être infinie ? et dans le cas où X est une variété différentiable ?

Exercice 11

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. Rappelons que T est (positivement) expansive s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y, il existe $n \geq 0$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \delta$.

1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.

2) Montrer que si X est compact, la propriété d'expansivité est topologique (elle ne dépend pas de la métrique mais de la topologie).

Exercice 12

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace métrique compact. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- T est expansive;

- il existe un recouvrement générateur ;

- si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le recouvrement $\mathcal{U}^\varepsilon$ par boules de rayon ε est générateur.

Exercice 13

L'entropie d'une application continue expansive $T : X \to X$ sur un espace métrique compact peut-elle être infinie ?

Exercice 14

Soit $T : X \to X$ une application continue expansive $T : X \to X$ sur un espace métrique compact.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(T^n)$ est fini.

2) Montrer que $h(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\big(\sharp\mathrm{Fix}(T^n)\big)$.

Exercice 15

Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Montrer que si T est (positivement) expansif, alors X est fini.

Exercice 16

Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme défini sur un espace métrique compact. Rappelons que T est expansif s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d\big(T^k(x), T^k(y)\big) \geq \delta$.

1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.

2) Montrer que T est expansif si et seulement si la suite $\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(\mathcal{U}^\varepsilon)\right)_{n\geq 0}$ est génératrice si $\varepsilon > 0$ est assez petit, et que $h(T) < +\infty$.

3) Là-encore, montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(T^n)$ est fini et que $h(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\big(\sharp\mathrm{Fix}(T^n)\big)$.

Exercice 17

Montrer qu'il n'y a pas d'homéomorphisme expansif sur $\mathbf{T}^1$.

Exercice 18

Prouver que la mesure de Lebesgue est la seule mesure borélienne de probabilité invariante par $T : \widehat{x} \mapsto p\widehat{x}$ sur $\mathbf{T}^1$, telle que $h_\mu(T) = h(T)$, si $p \geq 2$.